(E) ISSN: 3030-3214
Volume 4, № 4
2026

УДК: 528.94:004.42:519.246.8 10.70769/3030-3214.SRT.4.4.2026.8

© 2026 Authors. Licensed under CC BY 4.0
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПЕРЕПРОЕЦИРОВАНИЯ КООРДИНАТ СКВАЖИН И ВЕРИФИКАЦИЯ ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ РЕЛЬЕФА БЕЛАРУСИ. ЧАСТЬ 2. ГЕОСТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛЬЕФА В ДВУХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ И ВЕРИФИКАЦИЯ ПО ЭТАЛОНУ FABDEM



Бильдюк Егор Викторович

Старший преподаватель кафедры «Горные работы», аспирант, магистр технических наук, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
E-mail: bilduk@bntu.by
ORCID ID: 0000-0001-8494-9093



Носуля Игорь Евгеньевич

Аспирант кафедры «Горные работы» Белорусского национального технического университета, Минск, Беларусь
E-mail: gr@bntu.by



Разводовский Александр Александрович

Аспирант кафедры «Горные работы» Белорусского национального технического университета, Минск, Беларусь
E-mail: fgde@bntu.by

Аннотация. *Рассмотрено влияние системы координат на результаты геостатистического моделирования рельефа Беларуси по отметкам устьев более 30 000 скважин (база данных «Буровая изученность Республики Беларусь», ГП «НПЦ по геологии»). Модели, построенные регрессионным кригингом в географических координатах (WGS84) и в проекции UTM 35N, сопоставлены вдоль диагонального профиля северо-запад – юго-восток длиной около 490 км и с независимым эталоном FABDEM, представленным в обеих системах координат. При сопоставлении каждой модели с соответствующим представлением FABDEM на собственной сетке и маске валидных узлов получены следующие показатели для UTM 35N и WGS84 соответственно: RMSE – 9,83 и 9,71 м, MAE – 7,37 и 7,32 м, систематическое смещение – −6,02 и −6,04 м, коэффициент корреляции – 0,9605 и 0,9615. Число узлов в выборках различается (5252 и 3282), поэтому данные показатели не являются результатом парного сравнения систем координат. При кросс-валидации по скважинам RMSE составила 5,92 м. Максимальная отметка профиля кригинга на Минской возвышенности в проекции UTM на 25 м выше, чем в географических координатах (260 и 235 м), однако два представления самого эталона различаются по максимальным отметкам на 11 м. Следовательно, преимущество метрической системы координат по точности высотных отметок на основании имеющихся данных не доказано. Анизотропия окрестности интерполяции в градусах (к≈1,7) рассматривается как рабочая гипотеза, требующая дополнительной численной проверки.*

Ключевые слова: *регрессионный кригинг, WGS84, UTM 35N, FABDEM, верификация, шум представления, Минская возвышенность, Беларусь.*

Received: 02.11.2026 | Accepted: 26.11.2026 | Issue publication: 28.12.2026

QUDUQ KOORDINATALARINI QAYTA PROYEKSIYALASHNI AVTOMATLASHTIRISH VA BELARUS RAQAMLI RELYEF MODELINI VERIFIKATSIYALASH. 2-QISM. RELYEFNI IKKI KOORDINATALAR TIZIMIDA GEOSTATISTIK MODELLASHTIRISH VA FABDEM ETALONI ASOSIDA VERIFIKATSIYALASH

Bildyuk Yegor Viktorovich
Belarus milliy texnika universiteti "Kon ishlari" kafedrasi katta o'qituvchisi, tayanch doktorant, texnika fanlari magistri, Minsk, Belarus

Nosulya Igor Yevgenyevich
Belarus milliy texnika universiteti "Kon ishlari" kafedrasi tayanch doktoranti, Minsk, Belarus

Razvodovskiy Aleksandr Aleksandrovich
Belarus milliy texnika universiteti "Kon ishlari" kafedrasi tayanch doktoranti, Minsk, Belarus

Annotatsiya. *Maqolada 30 000 dan ortiq burg'ilash quduqlari og'zining mutlaq balandlik belgilari asosida Belarus hududi relyefini geostatistik modellashtirish natijalariga koordinatalar tizimining ta'siri o'rganilgan. Geografik koordinatalar tizimida (WGS84) va UTM 35N proyeksiyasida regression kriging usuli yordamida qurilgan modellar taxminan 490 km uzunlikdagi shimoli-g'arb – janubi-sharq yo'nalishidagi diagonal profil bo'ylab hamda har ikkala koordinatalar tizimida ifodalangan mustaqil FABDEM etalon modeli bilan taqqoslangan. Har bir model tegishli FABDEM etaloni bilan o'zining koordinata to'ri va yaroqli tugunlar maskasi asosida solishtirilgan. UTM 35N va WGS84 tizimlari uchun o'rtacha kvadratik xatolik (RMSE) mos ravishda 9,83 va 9,71 m, o'rtacha mutlaq xatolik (MAE) 7,37 va 7,32 m, tizimli siljish −6,02 va −6,04 m, korrelyatsiya koeffitsiyenti esa 0,9605 va 0,9615 ni tashkil etgan. Tanlanmalardagi tugunlar soni turlicha (5252 va 3282) bo'lganligi sababli mazkur ko'rsatkichlar koordinatalar tizimlarini juft holda taqqoslash natijasi hisoblanmaydi. Quduqlar bo'yicha kross-validatsiya natijasida RMSE 5,92 m ni tashkil etgan. Minsk qirligida UTM proyeksiyasida qurilgan kriging profilining maksimal balandligi geografik koordinatalar tizimidagiga nisbatan 25 m yuqori (260 va 235 m) bo'lgan, biroq FABDEM etalonining ikki xil ifodalanishidagi maksimal balandliklar ham 11 m ga farq qilgan. Olingan natijalar metrik koordinatalar tizimining balandlik belgilarini aniqlashdagi ustunligini isbotlamaydi. Graduslarda ifodalangan interpolyatsiya atrofidagi anizotropiya (κ≈1,7) qo'shimcha sonli tekshiruvni talab qiluvchi ishchi faraz sifatida qaralgan.*

Kalit so'zlar: *regression kriging, WGS84, UTM 35N, FABDEM, verifikatsiya, ifodalash shovqini, Minsk qirligi, Belarus.*

AUTOMATED REPROJECTION OF BOREHOLE COORDINATES AND VERIFICATION OF THE DIGITAL ELEVATION MODEL OF BELARUS. PART 2. GEOSTATISTICAL MODELLING OF RELIEF IN TWO COORDINATE SYSTEMS AND VERIFICATION AGAINST THE FABDEM REFERENCE

Bildyuk Egor Viktorovich
Senior Lecturer, Department of Mining, Postgraduate Researcher, Master of Technical Sciences, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

Nosulya Igor Evgenyevich
Postgraduate Researcher, Department of Mining, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

Razvodovsky Alexander Alexandrovich
Postgraduate Researcher, Department of Mining, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 4, № 4
2026

Abstract. *This paper examines the influence of coordinate systems on the results of geostatistical modelling of the relief of Belarus using the collar elevations of more than 30,000 boreholes. Regression kriging models constructed in geographic coordinates (WGS84) and in the UTM zone 35N projection were compared along an approximately 490 km northwest–southeast diagonal profile and against the independent FABDEM reference represented in both coordinate systems. Each model was compared with the corresponding FABDEM representation using its own grid and valid-data mask. For UTM 35N and WGS84, respectively, the root mean square error (RMSE) was 9.83 and 9.71 m, the mean absolute error (MAE) was 7.37 and 7.32 m, the systematic bias was −6.02 and −6.04 m, and the correlation coefficient was 0.9605 and 0.9615. The sample sizes differed (5,252 and 3,282 nodes); therefore, these metrics do not constitute a paired comparison between the coordinate systems. Borehole cross-validation yielded an RMSE of 5.92 m. The maximum elevation of the kriging profile over the Minsk Upland was 25 m higher in the UTM projection than in geographic coordinates (260 versus 235 m), while the two FABDEM representations differed by 11 m at their maximum elevations. Consequently, the available results do not demonstrate an advantage of the metric coordinate system in terms of elevation accuracy. The anisotropy of the interpolation neighbourhood in geographic coordinates expressed in degrees ($\kappa \approx 1.7$) is considered a working hypothesis requiring further numerical verification.*
Keywords: *regression kriging, WGS84, UTM 35N, FABDEM, verification, representation noise, Minsk Upland, Belarus.*

Введение. Настоящая статья — вторая часть цикла из трёх связанных работ; в первой части [1] описаны исходные данные, модуль GeoProjector-BY, выбор проекции UTM 35N (искажения длин не более 0,16%) и картометрическая проверка площади территории (207 499 км² геодезически, 207 459 км² в UTM, 347 714 км² при построении в градусах как равных единицах). Исходной информацией служит база данных «Буровая изученность Республики Беларусь» (ГП «НПЦ по геологии»): более 30 000 точек наблюдений с координатами устьев скважин и абсолютными отметками поверхности рельефа.

Интерполяция отметок использует расстояния между точками для выбора соседей, построения вариограммы и вычисления весов. Если расстояния измеряются в градусах, то одинаковое градусное расстояние по широте и по долготе соответствует на местности разным длинам (отношение $\ell_\varphi/\ell_\lambda \approx 1{,}7$ на широте Беларуси, обозначения — как в части 1), и изотропная окрестность на плоскости градусов становится на местности эллиптической. В качестве рабочего допущения принято, что это приводит к систематическому различию интерполированных поверхностей, наиболее заметному на высоких и крутых участках рельефа; допущение требует проверки контролируемым численным экспериментом. Переход от высотной погрешности к погрешности объёмов зависит как от величины отклонения, так и от площади, на которую оно распространяется.

Цель работы — оценить влияние системы координат (градусы WGS84 и проекция UTM 35N) на результат геостатистического моделирования рельефа Беларуси по скважинным данным, сопоставить модели между собой и с независимым эталоном, отделив различия моделей от шума представления самого эталона.

Задачи исследования:

1. построить модели рельефа в двух системах координат (регрессионный кригинг) и сопоставить их вдоль диагонального профиля, выразив расстояния в километрах;
2. сформировать протокол сопоставления каждой модели с эталоном на согласованной сетке соответствующей системы координат и определить ограничения прямого сравнения метрик, рассчитанных на разных наборах узлов;
3. обсудить возможный вклад шума представления эталона и различия вертикальных датумов в наблюдаемые расхождения, указав ограничения их количественной оценки.

Научная новизна состоит в сопоставлении моделей рельефа национального масштаба, построенных по одному и тому же скважинному массиву в двух системах координат, с

независимым эталоном, а также в анализе ограничений, связанных с различием вертикальных датумов и пространственной автокорреляцией при интерпретации метрик. Отдельно обсуждается различие моделей и шума представления эталона; количественное разделение этих факторов в работе не выполнено. Новизна метода регрессионного кригинга не заявляется. Объёмные и горно-технические последствия расхождений рассматриваются в третьей части цикла.

Анализ литературы и методы

Анализ литературы. Теоретические основы геостатистики заложены Ж. Матероном [3] и изложены в монографии [4]. Для переменных с региональным трендом применяется регрессионный кригинг — оценка тренда регрессией и кригинг остатков [5]; в последние годы наряду с ним применяются методы машинного обучения [6, 7]. Сопоставление ЦМР с независимыми эталонами и терминология (модель поверхности DSM, модель рельефа DTM) изложены в [8]; характеристики эталонов — в [9, 10], вертикальная точность свободно распространяемых глобальных ЦМР — в [11]. Для оценки точности применяются RMSE и MAE, которые дополняют друг друга: RMSE более чувствителен к крупным ошибкам [12]. При пространственной автокорреляции остатков оценки точности, полученные по случайным подвыборкам, оптимистичны, поэтому применяются блочная кросс-валидация [13] и оговорки об интерпретации метрик [14]. Практика построения сеточных моделей по скважинным данным в ГИС-пакетах изложена в учебно-методическом комплексе кафедры «Горные работы» БНТУ [15]. Новизна самого метода интерполяции не заявляется. Ограниченность области применимости пространственных моделей в слабо опробованных районах рассматривается в [16].

Геостатистическое моделирование. Отметка поверхности в точке $\mathbf{s}$ представляется как сумма регионального тренда и случайной составляющей остатков [5]:

$$Z(\mathbf{s}) = m(\mathbf{s}) + \varepsilon(\mathbf{s}),$$
$$m(\mathbf{s}) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 \quad (1)$$

Тренд $m(\mathbf{s})$ — полином второго порядка по координатам; остатки $\varepsilon(\mathbf{s})$ моделируются сферической вариограммой

$$\gamma(h) = \begin{cases} c_0 + c_1\left[\frac{3h}{2a} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right], & 0 < h \le a, \\ c_0 + c_1, & h > a, \end{cases} \qquad \gamma(0) = 0 \quad (2)$$

где $c_0 = 21{,}6$ м² — эффект самородка, $c_0 + c_1 = 329{,}5$ м² — порог (следовательно, $c_1 = 307{,}9$ м²), $a = 144{,}4$ км — радиус корреляции. Итоговая оценка в узле — сумма тренда и кригинга остатков:

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \hat{m}(\mathbf{s}_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \hat{\varepsilon}(\mathbf{s}_i),$$
$$\sum_i \lambda_i \, C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = C(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_j) \quad (3)$$

Расстояния h вычисляются как евклидовы в системе координат модели; именно этим построение в градусах отличается от построения в метрах. Для сравнения применяется метод обратных расстояний (IDW), не требующий модели вариограммы, но также зависящий от метрики расстояний (в настоящей работе IDW приведён как справочный метод; результаты по нему не обсуждаются):

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{0i}^{-p} \, Z(\mathbf{s}_i)}{\sum_{i=1}^{n} d_{0i}^{-p}},$$
$$d_{0i} = \| \, \mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_i \, \| \quad (4)$$

Параметры регионального кригинга оценены по 5-блочной кросс-валидации в Python; для той же выборки регрессионный кригинг (полином второго порядка и сферическая вариограмма остатков) дал RMSE = 5,92 м, MAE = 3,11 м и R^2 = 0,935, а метод обратных расстояний — 6,16 м, 3,27 м и 0,930 соответственно. Модели построены в Golden Software Surfer по одним и тем же отметкам скважин дважды: в географических координатах (WGS84) и в проекции UTM 35N, с одинаковыми параметрами интерполяции, и обрезаны по контурам, подготовленным в части 1 (листинг 2 части 1).

В градусной системе круглая окрестность радиуса r° превращается на местности в эллипс с полуосями

$$a_\lambda = r^\circ \, \ell_\lambda, \qquad a_\varphi = r^\circ \, \ell_\varphi,$$
$$\kappa = \frac{a_\varphi}{a_\lambda} = \frac{\ell_\varphi}{\ell_\lambda} \approx \frac{111{,}2}{66{,}8} \approx 1{,}66 \quad (5)$$

(на широте 54° — около 1,7; значение 66,8 км на градус долготы соответствует средней широте профиля около 53,2°). Таким образом, изотропные поисковая окрестность и вario-

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 4, № 4
2026

грамма в градусах становятся на местности анизотропными: при одинаковом градусном расстоянии точка вдоль меридиана получает тот же вес, что и точка вдоль параллели, хотя на местности она в κ раз дальше.

Эталонные модели и метрики верификации. В качестве независимого эталона использованы глобальные данные Copernicus DEM GLO-30 и FABDEM с разрешением около 30 м. Copernicus DEM GLO-30 — модель поверхности (DSM), включающая растительность и застройку [8, 9]; отметки устьев скважин относятся к уровню земли, поэтому основным эталоном служит FABDEM (Forest And Buildings removed Copernicus DEM), из которого удалено влияние лесов и зданий [10]. Модели по скважинам сохранены в бинарном формате Surfer 7 (DSRB); сопоставление с эталоном выполнено по узлам сетки с применением масок и передискретизации.

Эталонные сетки подготовлены в Python (rasterio, geopandas, dem_stitcher, NumPy [2]) в четыре этапа. (1) Выгрузка тайлов FABDEM по пространственному охвату территории Беларуси. (2) Объединение тайлов и обрезка по контуру государственной границы, подготовленному в части 1 [1]; значения вне границы и коды NoData исключены из анализа. (3) Подготовка представлений в географической системе WGS84 и в проекции UTM 35N (EPSG:32635). (4) Приведение эталона к геометрии сетки соответствующей модели; при этом применялось усредняющее передискретизирование (Resampling.average). Таким образом, метрики рассчитывались отдельно для пары «модель UTM — FABDEM UTM» и для пары «модель WGS84 — FABDEM WGS84». Число валидных узлов в парах различается, поскольку сетки имеют разную геометрию и шаг. Сравнение двух представлений FABDEM по профилю используется как индикатор чувствительности к представлению растра, но не как универсальная оценка погрешности самого эталона. Вертикальные основания скважинных отметок и FABDEM также могут различаться; это ограничение учитывается при интерпретации систематического смещения.

Остаток модели в контрольной точке $e_i = Z_i^{mod} - Z_i^{ref}$; точность оценивается среднеквадратичной ошибкой, средней абсолютной ошибкой, систематическим смещением и коэффициентом корреляции Пирсона:

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i^2}, \quad (6)$$

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |e_i|, \quad (7)$$

$$\mathrm{Bias} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i, \quad (8)$$

$$r = \frac{\sum_i \left(Z_i^{mod} - \overline{Z^{mod}}\right)\left(Z_i^{ref} - \overline{Z^{ref}}\right)}{\sqrt{\sum_i \left(Z_i^{mod} - \overline{Z^{mod}}\right)^2 \sum_i \left(Z_i^{ref} - \overline{Z^{ref}}\right)^2}}, \quad (9)$$

$$\mathrm{RMSE}^2 = \mathrm{Bias}^2 + \mathrm{SD}(e)^2 \quad (10)$$

Листинг 1. Расчёт метрик точности (NumPy)

```
import numpy as np

def metrics(mod, ref):
    mod, ref = np.asarray(mod, float), np.asarray(ref, float)
    m = ~(np.isnan(mod) | np.isnan(ref))
    e = mod[m] - ref[m]
    return dict(N=int(e.size),
                RMSE=float(np.sqrt(np.mean(e**2))),
                MAE=float(np.mean(np.abs(e))),
                Bias=float(np.mean(e)),
                r=float(np.corrcoef(mod[m], ref[m])[0, 1]))
```

Протокол сопоставления моделей и эталона. В работе необходимо различать единый пространственный домен Ω и единую маску узлов. Единый домен Ω задаётся контуром территории исследования и общими правилами исключения невалидных значений. Однако он не означает совпадения узлов регулярных сеток: для UTM 35N используется метрический шаг Δx = Δy = 2000 м, а для WGS84 — угловой шаг Δλ = Δφ = 0,02°. Узлы этих сеток не совпадают по географическому положению, а размеры ячеек WGS84 на местности зависят от широты. Поэтому применение одинакового контура и одинаковых диапазонов высот не создаёт единую маску попиксельного сравнения.

Для расчёта метрик каждой модели относительно соответствующего представления FABDEM сопоставляются значения, приведённые к одной и той же геометрии сетки внутри данной пары (модель — эталон). Перед расчётом проверяются CRS, размеры матриц, трансформация растра и положение ячеек; если они не совпадают, попиксельные метрики без

пространственного согласования не вычисляются. При подготовке эталона использовалось усредняющее передискретизирование (Resampling.average), поэтому его влияние рассматривается как ограничение процедуры, а не как доказательство того, что передискретизация всегда искажает данные сильнее, чем альтернативы.

Формирование выборок для сопоставления выполнялось не сплошным покрытием территории, а по маске валидных узлов Ω, которая строилась внутри каждой пары «модель — эталон» и включала только те узлы, в которых одновременно заданы значения модели и соответствующего представления FABDEM. Из выборки исключались узлы с кодами NoData, краевые ячейки с неполным покрытием или артефактами передискретизации, а также узлы, отметки которых выходят за физический диапазон высот территории Беларуси (от 80 м в долине р. Неман до 345 м на г. Дзержинская) или признаны выбросами по критерию 3×IQR. С учётом шага дискретизации (Δx = Δy = 2000 м для UTM 35N и Δλ = Δφ = 0,02° для WGS84) в окончательный расчёт вошли наборы из N = 5 252 и N = 3 282 узлов соответственно. Поскольку радиус корреляции остатков (a = 144,4 км) многократно превышает шаг сетки, соседние узлы статистически не независимы, и эффективное число независимых наблюдений существенно меньше N; поэтому RMSE и MAE рассматриваются как описательные характеристики расхождения, а не как основа для статистических выводов о различии систем координат.

Для UTM 35N и WGS84 валидные пары «модель — FABDEM» сформированы отдельно, что дало N = 5 252 и N = 3 282 соответственно (таблица 2). Это две выборки на разных сетках, а не одна общая маска узлов. Полученные RMSE, MAE, Bias и r характеризуют расхождение каждой модели с соответствующим представлением FABDEM на своей сетке; небольшую разницу метрик между системами координат нельзя трактовать как доказанное преимущество одной системы или как результат парного статистического теста. Для прямого статистического сравнения моделей необходим отдельный эксперимент: обе модели и эталон оцениваются в одних и тех же географических точках, после чего парные разности анализируются с учётом пространственной автокорреляции.

$$\mathrm{SE}(\bar{d}) = \frac{s_d}{\sqrt{n_{\mathrm{eff}}}}, \qquad n_{\mathrm{eff}} \le N, \tag{11}$$

где s_d — стандартное отклонение парных разностей d между моделями, n_{eff} — эффективное число независимых узлов, оцениваемое по вариограмме остатков или блочным бутстрепом с размером блока не менее радиуса корреляции [13, 14]. В настоящей работе парный тест не выполнялся.

Результаты исследования и их обсуждение

Профильное сопоставление моделей по скважинам. Диагональный профиль СЗ — ЮВ задан одними и теми же конечными точками на всех четырёх сетках (26,42° в. д., 55,03° с. ш. и 30,45° в. д., 51,34° с. ш.): на картах в градусах он является прямой в градусной плоскости (профили 1–1 по кригингу и 4–4 по FABDEM), на картах в UTM — прямой в метрической плоскости (профили 2–2 по кригингу и 3–3 по FABDEM). Профиль пересекает Минскую возвышенность и заканчивается на юго-востоке территории. Модели по скважинам и профили 1–1 и 2–2 показаны на рисунке 1. Геодезическая длина профиля между конечными точками равна 490,5 км, длина линии 2–2 в проекции UTM — 491 км (таблица 1). На всех профилях горизонтальная ось дана в километрах (0–490 км), вертикальная — в метрах.

Расстояние на профиле в градусной системе определяется как $d^\circ = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\varphi^2} = \sqrt{4,03^2 + 3,69^2} \approx 5,46^\circ$, тогда как истинное расстояние с учётом разной длины градуса по широте и долготе $d = \sqrt{(\Delta\lambda\,\ell_\lambda)^2 + \left(\Delta\varphi\,\ell_\varphi\right)^2} \approx$ 490 км, $\ell_\varphi \approx 111,2$ км/°, $\ell_\lambda \approx 66,8$ км/°.

Величина 5,46° физического смысла не имеет: при умножении на единый множитель 111,195 км/° получается 607 км, то есть на 24 % больше истинной длины. Поэтому ось расстояний профиля в градусной системе пересчитана в километры интегрированием длины пути вдоль линии на эллипсоиде WGS84, а ось профиля в UTM переведена из метров в километры. Отметки Z при перепроецировании

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 4, № 4
2026

не изменяются, поэтому высоты в узлах скважин одинаковы в обеих системах координат и вертикальная шкала пересчёта не требует.

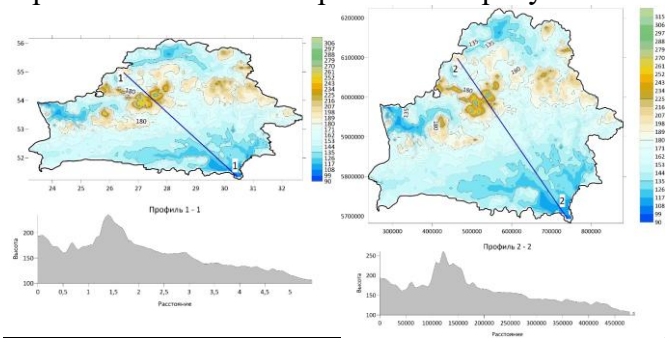

Рис.1. Сеточные модели рельефа Беларуси, построенные кригингом по отметкам устьев более 30 000 скважин (шкала — абсолютные отметки, м), и диагональные профили СЗ — ЮВ:

а — сетка в географических координатах (WGS84) и профиль 1–1, расстояние на профиле пересчитано в километры; б — сетка в проекции UTM 35N (оси карты в километрах) и профиль 2–2.

Таблица 1.

Геометрия профилей и их наибольшие отметки

Показатель	Профиль 1–1 (кригинг, градусы)	Профиль 2–2 (кригинг, UTM 35N)	Профиль 4–4 (FABDEM, градусы)	Профиль 3–3 (FABDEM, UTM 35N)
Длина по оси карты	5,46° (без единицы длины)	≈ 491 км	5,46°	≈ 491 км
Длина при 1° = 111,195 км	607 км (+24 %)	—	607 км (+24 %)	—
Геодезическая длина линии, км	490,5	491	490,5	491
Наибольшая отметка на профиле, м	235	260	≈ 281	≈ 292
Разность наибольших отметок (UTM − WGS84), м	25		≈ 11	
Расстояние до максимума, км	125	122	≈ 119	≈ 120

Отметки Z в исходных данных при перепроецировании не изменяются, поэтому значения высот в узлах скважин одинаковы в обеих системах координат, а вертикальная шкала профилей не требует пересчёта. Однако значения сетки между скважинами зависят от метрики, в которой считаются расстояния при интерполяции, поэтому профили кригинга различаются: наибольшая отметка составляет 235 м на профиле 1–1 и 260 м на профиле 2–2 (разность 25 м, или 10,6% от меньшего значения). Максимум в обоих случаях находится в пределах Минской возвышенности на расстоянии 122–125 км от начала профиля. На остальной части профиля кривые близки (рисунок 3, а): по оцифровке с шагом 1 км средняя абсолютная разность профилей кригинга составляет 4,1 м, сред-неквадратическая — 7,4 м, коэффициент корреляции — 0,984 (таблица 3; погрешность оцифровки около 2–3 м), то есть различие сосредоточено на самом высоком и крутом участке.

Верификация по эталону FABDEM. Эталонная модель FABDEM в двух системах координат с профилями 4–4 (градусы) и 3–3 (UTM) показана на рисунке 2, сравнительные профили — на рисунке 3. Результаты сопоставления по узлам приведены в таблице 2, по профилям — в таблице 3.

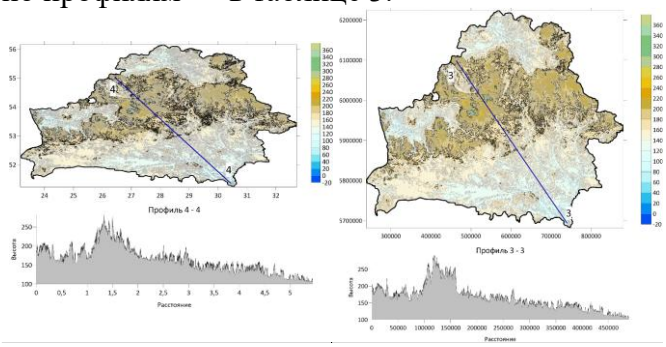

Рис.2. Эталонная модель FABDEM (шкала — абсолютные отметки, м) и профили вдоль той же линии:

а — в географических координатах и профиль 4–4, расстояние пересчитано в километры; б — в проекции UTM 35N (оси в километрах) и профиль 3–3.

Региональная оценка точности по скважинам (регрессионный кригинг) дала по результатам 5-блочной кросс-валидации RMSE=5,92 м и MAE=3,11 м. Результаты сопоставления сеточных моделей с эталоном FABDEM приведены в таблице 2 (остаток вычислялся как «модель минус эталон»).

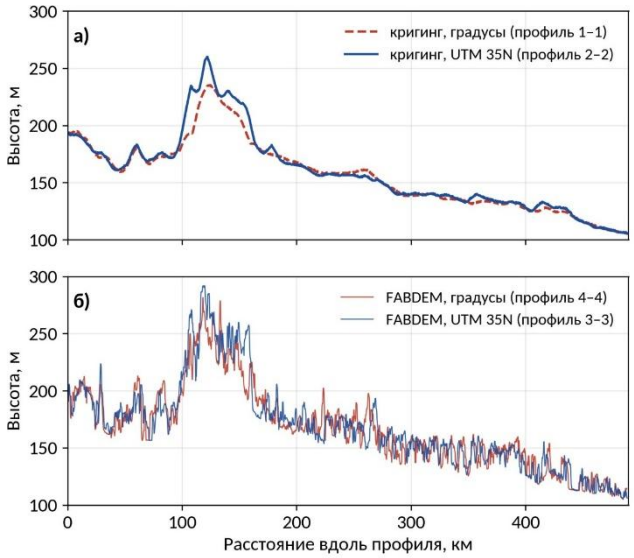

Рис.3. Сравнительные профили вдоль диагонали СЗ — ЮВ:

а — кригинг в градусах (профиль 1–1) и в UTM (профиль 2–2); б — FABDEM в градусах (профиль 4–4) и в UTM (профиль 3–3) (по оцифровке рисунков 1 и 2).

Таблица 2.

Верификация моделей относительно FABDEM на сетке соответствующей системы координат и маске валидных узлов (наборы узлов различаются)

Сопоставление	Узлов, N	RMSE, м	MAE, м	Bias, м	r
Кригинг по скважинам, кросс-валидация (5 блоков)	—	5,92	3,11	—	—
Кригинг UTM 35N — FABDEM UTM 35N	5 252	9,83	7,37	−6,02	0,9605
Кригинг WGS84 — FABDEM WGS84	3 282	9,71	7,32	−6,04	0,9615

При сопоставлении каждой модели с соответствующим представлением FABDEM на собственной сетке и маске валидных узлов получены близкие метрики: RMSE=9,83 м (UTM 35N) и 9,71 м (WGS84), MAE=7,37 и 7,32 м, Bias=−6,02 и −6,04 м, r=0,9605 и 0,9615. Выборки различаются по числу узлов (5 252 и 3 282), поэтому разница метрик в доли метра не доказывает преимущество одной системы координат. RMSE относительно FABDEM выше, чем RMSE кросс-валидации по скважинам (5,92 м), что отражает расхождение скважинной модели с независимым эталоном; на него могут влиять сглаживание рельефа, различия высотных оснований и характеристики эталона. Их отдельный вклад в настоящей работе не оценён.

Сопоставление вдоль профиля (таблица 3, рисунок 3) показывает, что наибольшая отметка на профиле FABDEM составляет 281 м в градусах и 292 м в UTM, то есть кригинг занижает максимум относительно эталона на 46 и 32 м соответственно. Однако сами два представления FABDEM различаются: RMSE между профилями 4–4 и 3–3 равна 14,3 м, разность максимумов — 11 м, а средняя отметка на участке 100–160 км составляет 233 и 248 м. Относительно «своего» эталона занижение кригинга на этом участке почти одинаково (21,9 м в градусах и 20,0 м в UTM).

Таблица 3.

Сопоставление профилей (по оцифровке, шаг 1 км, 5–485 км)

Сопоставление	Bias, м	MAE, м	RMSE, м	r
Кригинг (градусы) − FABDEM (градусы)	−11,3	12,9	16,3	0,947
Кригинг (UTM) − FABDEM (UTM)	−10,2	11,5	14,5	0,968
FABDEM (градусы) − FABDEM (UTM)	−1,6	10,5	14,3	0,929
Кригинг (градусы) − кригинг (UTM)	−2,7	4,1	7,4	0,984

Вдоль профиля кригинг в UTM ближе к эталону, чем в градусах (RMSE 14,5 и 16,3 м; r=0,968 и 0,947), но выигрыш в 1,8 м меньше шума, возникающего между двумя представлениями самого эталона (14,3 м). Поэтому преимущество метрической системы по точности отметок по имеющимся данным не доказано: по средним метрикам по узлам (таблица 2) оно не выявлено, по одному профилю (таблица 3) выражено слабо. Показатели вдоль профиля (смещение −10…−11 м) отличаются от показателей по узлам (около −6,0 м), поскольку профиль пересекает Минскую возвышенность, где сглаживание

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 4, № 4
2026

кригингом сильнее, и выборки узлов в двух сопоставлениях различны.

Пространственное распределение остатков «кригинг − FABDEM» приведено в части 3 (рисунок 3 [17]); диаграммы рассеяния отметок модели и эталона — на рисунке 4. Остатки преимущественно отрицательны: на картах преобладают классы от 0 до −10 м и от −10 до −20 м, что согласуется с систематическим смещением около −6,0 м; положительные остатки единичны и локальны. Наибольшие по модулю отрицательные остатки (от −20 до −30 м и ниже) сгруппированы в центральной части территории, по-видимому, на возвышенностях, где сглаживание кригингом сильнее; причинная связь формально не проверялась. Картины для WGS84 и UTM сходны, различаются детали на локальных экстремумах.

На диаграммах рассеяния (рисунок 4) облако точек вытянуто вдоль линии y = x с коэффициентом корреляции r = 0,9615 (WGS84) и r = 0,9605 (UTM), но лежит ниже этой линии, а рассеяние растёт с высотой: при отметках эталона более 225 м большинство узлов находится ниже линии согласия, что согласуется с занижением максимумов моделью. Практически одинаковые r, RMSE и MAE для двух систем координат подтверждают, что по средним метрикам по узлам различие систем не выявлено; сопоставимость оценок ограничена различием наборов узлов.

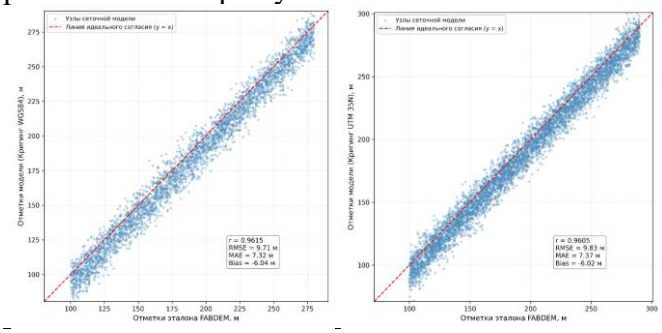

Рис.4. Диаграммы рассеяния отметок модели (кригинг) и эталона FABDEM по узлам сетки с линией идеального согласия y = x и значениями r, RMSE, MAE и Bias:
а — WGS84; б — UTM 35N.

Обсуждение

Различие моделей и шум представления. Различие моделей кригинга в UTM и WGS84 сосредоточено на высоком и крутом участке (Минская возвышенность): разность максимумов составляет 25 м, средняя абсолютная разность вдоль профиля — 4,1 м. Одновременно два представления самого эталона, FABDEM в UTM и в градусах, различаются на максимуме на 11 м (RMSE вдоль профиля 14,3 м). Следовательно, значительная часть разности на максимуме может быть обусловлена формой ячеек и передискретизацией растров в градусной системе, а не интерполяцией как таковой: по порядку величины «шум представления» эталона (11 м) сопоставим с разностью кригинг-моделей (25 м). Для локальной вершины $z(x) \approx z_0 - 1/2\,|z''|x^2$ при отсчётах с шагом Δ наибольшее занижение вершины составляет $\delta z_{\max} \approx \frac{|z''|\,\Delta^2}{8}$, то есть растёт пропорционально квадрату шага; усредняющее передискретизирование и сглаживающая окрестность поиска усиливают этот эффект. Это объяснение оценено по порядку величины и непосредственно не проверено.

Рабочее допущение об анизотропии. Наряду с представлением растра принимается геометрическое объяснение: изотропные поисковая окрестность и вариограмма в градусах вытянуты на местности вдоль меридианов в $\kappa \approx 1{,}7$ раза, усреднение по такой окрестности сглаживает узкие положительные формы рельефа, и пик занижается. Это допущение не является доказанным фактом: оно согласуется с наблюдаемой картиной, но не отделено от влияния представления растра и различия наборов узлов. Для проверки необходим контролируемый численный эксперимент: построение трёх моделей по одним и тем же скважинам с одинаковыми параметрами — в градусах с изотропной окрестностью, в градусах с окрестностью, масштабированной по κ, и в UTM — с блочной кросс-валидацией, единой сеткой, общей маской и эталоном, взятым билинейной выборкой в одних и тех же точках в обеих системах. Такой эксперимент в настоящей работе не выполнялся.

Систематическое смещение и вертикальные датумы. Модель в среднем ниже FABDEM примерно на 6 м. Часть смещения может быть связана с различием высотных

оснований: отметки эталона FABDEM связаны с ортометрической системой высот, тогда как отметки скважин отнесены к Балтийской системе высот. Вклад этого фактора в настоящей работе отдельно не оценивался, поэтому количественно отделить его от сглаживания кригингом, характеристик эталонной модели и других источников расхождения нельзя. Для такой оценки требуется согласование высотных оснований по проверенным геодезическим моделям и повторный расчёт метрик.

Другие возможные причины, не проверенные в настоящей работе: сглаживание кригингом локальных максимумов; приуроченность части скважин к долинам и пониженным элементам рельефа; остаточное влияние растительности и застройки на эталон [10, 11]. Различие между RMSE по скважинам (5,92 м) и RMSE относительно FABDEM (около 9,8 м) показывает, что часть расхождения обусловлена не интерполяцией, а различием самих отметок и эталона.

Пространственная автокорреляция и значимость. Различия метрик в доли метра (RMSE 9,71 и 9,83 м; MAE 7,32 и 7,37 м) сопоставимы с собственной погрешностью эталона и с неопределённостью, вносимой автокорреляцией остатков. Без парного теста на единой сетке с учётом эффективного числа независимых узлов (раздел 2.4) они не интерпретируются как различие качества моделей.

Ограничения. Наборы узлов для UTM 35N и WGS84 различаются (5 252 и 3 282 узла; маска строилась отдельно для модели и эталона в каждой системе), поэтому сравнение метрик относительно FABDEM не является парным сравнением систем. (2) Различия метрик в доли метра не проверены парным тестом с учётом пространственной автокорреляции. (3) Часть систематического смещения (около −6,0 м) может быть обусловлена различием высотных оснований; её величина не оценена. (4) Значения на профилях получены оцифровкой рисунков (погрешность около 2–3 м); сопоставление выполнено вдоль одного профиля. (5) Разность максимумов двух представлений FABDEM (около 11 м) сопоставима с разностью максимумов моделей кригинга; причины этого различия не проверены. (6) Объяснение различия моделей анизотропией окрестности остаётся рабочим допущением. (7) Copernicus DEM GLO-30 является моделью поверхности (DSM) [8, 9], а FABDEM лишь частично удаляет влияние растительности и застройки [10]; собственная погрешность эталона не вычиталась. (8) Порог 3×IQR может срезать реальные экстремумы рельефа, а погрешность отметок устьев скважин не учитывалась.

Выводы и предложения. Модели рельефа Беларуси, построенные регрессионным кригингом по отметкам более 30 000 скважин в градусах WGS84 и в проекции UTM 35N, различаются прежде всего на Минской возвышенности (максимум на профиле 235 м в градусах и 260 м в UTM). Расстояние вдоль диагонального профиля в градусной системе физического смысла не имеет (5,46° против 490,5 км; при единой 111,195 км/° — на 24 % больше), поэтому на всех рисунках расстояния приведены в километрах.

При сопоставлении каждой модели с соответствующим представлением FABDEM на своей сетке и маске валидных узлов получены RMSE = 9,83 м (UTM 35N, N = 5 252) и 9,71 м (WGS84, N=3 282), MAE=7,37 и 7,32 м, смещение −6,02 и −6,04 м, r = 0,9605 и 0,9615. При кросс-валидации по скважинам RMSE=5,92 м, MAE = 3,11 м. Поскольку наборы узлов различаются, эти метрики не позволяют провести парный тест между системами; для корректного сравнения требуется единая сетка, общая маска и контроль в одних и тех же точках.

Сами два представления эталона (FABDEM в UTM и в градусах) различаются на максимуме на 11 м, RMSE вдоль профиля 14,3 м; это сопоставимо с выигрышем кригинга в UTM над кригингом в градусах вдоль профиля (RMSE 14,5 и 16,3 м). Преимущество метрической системы по точности отметок по имеющимся данным не доказано; анизотропия окрестности в градусах (к ≈ 1,7) принята как рабочее допущение.

Для региональных оценок по геометрическим причинам (метрические расстояния, искажения не более 0,16 %; часть 1) более пригодна проекция UTM 35N, хотя преимущество по точности отметок не доказано;

(E) ISSN: 3030-3214
Volume 4, № 4
2026

для проектирования карьеров необходимы уточнение по данным съёмки и местные системы координат; последствия расхождений для объёмов вскрыши и уклонов рассматриваются в третьей части цикла.

Предложения: (1) выполнить парный тест с учётом автокорреляции на одних и тех же узлах для обеих систем координат; (2) провести контролируемый эксперимент по анизотропии (три варианта построения по одним и тем же скважинам); (3) оценить вклад разности вертикальных оснований; (4) выполнить сопоставление с Copernicus DEM GLO-30 (модель поверхности, DSM) на тех же узлах для оценки вклада растительности и застройки в расхождения; (5) утвердить одну пару сеток с одинаковым шагом и выполнить по ней окончательный расчёт пиков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бильдюк, Е. В., Носуля, И. Е., & Разводовский, А. А. (n.d.). Автоматизация перепроецирования координат скважин и верификация цифровой модели рельефа Беларуси. Часть 1. Подготовка данных: модуль GeoProjector-BY, выбор проекции и картометрическая проверка [Рукопись].
[2] Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., et al. (2020). Array programming with NumPy. Nature, 585(7825), 357–362. https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2
[3] Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics. Economic Geology, 58(8), 1246–1266. https://doi.org/10.2113/gsecongeo.58.8.1246
[4] Goovaerts, P. (1997). Geostatistics for natural resources evaluation. Oxford University Press.
[5] Hengl, T., Heuvelink, G. B. M., & Rossiter, D. G. (2007). About regression-kriging: From equations to case studies. Computers & Geosciences, 33(10), 1301–1315. https://doi.org/10.1016/j.cageo.2007.05.001
[6] Hengl, T., Nussbaum, M., Wright, M. N., Heuvelink, G. B. M., & others. (2018). Random forest as a generic framework for predictive modeling of spatial and spatio-temporal variables. PeerJ, 6, e5518. https://doi.org/10.7717/peerj.5518
[7] Sekulić, A., Kilibarda, M., Heuvelink, G. B. M., Nikolić, M., & Bajat, B. (2020). Random forest spatial interpolation. Remote Sensing, 12(10), 1687. https://doi.org/10.3390/rs12101687
[8] Guth, P. L., Van Niekerk, A., Grohmann, C. H., Muller, J.-P., Hawker, L., Florinsky, I. V., Gesch, D., Reuter, H. I., Herrera-Cárdenas, J., Riazanoff, S., & others. (2021). Digital elevation models: Terminology and definitions. Remote Sensing, 13(18), 3581. https://doi.org/10.3390/rs13183581
[9] Airbus Defence and Space. (2024). Copernicus digital elevation model: Product handbook (Issue 5.0). https://dataspace.copernicus.eu/sites/default/files/media/files/2024-06/geo1988-copernicusdem-spe-002_producthandbook_i5.0.pdf
[10] Hawker, L., Uhe, P., Paulo, L., Sosa, J., Savage, J., Sampson, C., & Neal, J. (2022). A 30 m global map of elevation with forests and buildings removed. Environmental Research Letters, 17(2), 024016. https://doi.org/10.1088/1748-9326/ac4d4f
[11] Uuemaa, E., Ahi, S., Montibeller, B., Muru, M., & Kmoch, A. (2020). Vertical accuracy of freely available global digital elevation models (ASTER, AW3D30, MERIT, TanDEM-X, SRTM, and NASADEM). Remote Sensing, 12(21), 3482. https://doi.org/10.3390/rs12213482
[12] Chai, T., & Draxler, R. R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? Arguments against avoiding RMSE in the literature. Geoscientific Model Development, 7(3), 1247–1250. https://doi.org/10.5194/gmd-7-1247-2014
[13] Roberts, D. R., Bahn, V., Ciuti, S., Boyce, M. S., Elith, J., Guillera-Arroita, G., Hauenstein, S., Lahoz-Monfort, J. J., Schröder, B., Thuiller, W., Warton, D. I., Wintle, B. A., & Dormann, C. F. (2017). Cross-validation strategies for data with temporal, spatial, hierarchical, or phylogenetic structure. Ecography, 40(8), 913–929. https://doi.org/10.1111/ecog.02881

[14] Wadoux, A. M. J.-C., Heuvelink, G. B. M., de Bruin, S., & Brus, D. J. (2021). Spatial cross-validation is not the right way to evaluate map accuracy. Ecological Modelling, 457, 109692. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2021.109692

[15] Оника, С. Г., Нарыжнова, Е. Ю., & Бильдюк, Е. В. (2023). Геоинформационные системы в горном деле: Электронный учебно-методический комплекс. БНТУ.

[16] Meyer, H., & Pebesma, E. (2021). Predicting into unknown space? Estimating the area of applicability of spatial prediction models. Methods in Ecology and Evolution, 12(9), 1620–1633. https://doi.org/10.1111/2041-210X.13650

[17] Бильдюк, Е. В., Носуля, И. Е., & Разводовский, А. А. (n.d.). Автоматизация перепроецирования координат скважин и верификация цифровой модели рельефа Беларуси. Часть 3. Влияние системы координат и высотной погрешности на объёмы вскрыши и устойчивость бортов [Рукопись].

Maqolaga iqtibos keltirish | Как цитировать статью | How to cite this article

Бильдюк, Е. В., Носуля, И. Е., & Разводовский, А. А. (2026). Автоматизация перепроецирования координат скважин и верификация цифровой модели рельефа Беларуси. Часть 2. Геостатистическое моделирование рельефа в двух системах координат и верификация по эталону FABDEM. Цифровые технологии в промышленности, 4(4). https://doi.org/10.70769/3030-3214.SRT.4.4.2026.8